Introdução aos Processos Estocásticos

Luiz Renato Fontes

Estrutura de classes

Suponha que $(X_n) \sim \text{CM}(\cdot, \mathbf{P})$ no espaço de estados $\mathcal{S}$.

Dados $x, y \in \mathcal{S}$, dizemos que x *alcança* y, *notação:* $x \to y$, se

$$\mathbb{P}_x(X_n = y \text{ para algum } n \geq 0) > 0.$$

E dizemos que x e y *se comunicam* (ou x *se comunica com* y), *notação:* $x \leftrightarrow y$, se $x \to y$ *e* $y \to x$.

Obs. Note que $x \to x$, e logo $x \leftrightarrow x$, $x \in \mathcal{S}$.

Teorema. Para $x, y \in \mathcal{S}$, $x \neq y$, são equivalentes:
(i) $x \to y$;
(ii) $\exists\ n \geq 1$ e $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{S}$, com $x_0 = x$ e $x_n = y$, tal que

$$P_{x_0 x_1} \cdots P_{x_{n-1} x_n} > 0;$$

(iii) $P_{xy}^{(n)} > 0$ para algum $n \geq 1$.

Estrutura de classes (cont.)

Dem. (i $\Rightarrow$ iii) Por subaditividade:

$$\sum_{n\geq 1}\mathbb{P}_x(X_n = y) \geq \mathbb{P}_x(\cup_{n\geq 1}\{X_n = y\}) \overset{(i)}{>} 0 \Rightarrow \text{(iii)}$$

(iii $\Rightarrow$ ii)

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}_x(X_n = y) \\ &= \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{S}} \mathbb{P}_x(X_1 = x_1, \ldots, X_{n-1} = x_{n-1}, X_n = y) \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{x_1,\ldots,x_{n-1}\in\mathcal{S}} P_{xx_1}\cdots P_{x_{n-1}y} \overset{(iii)}{>} 0 \Rightarrow \text{(ii)} \end{aligned}$$

(ii $\Rightarrow$ i) De (ii) e $(*)$ segue que $\mathbb{P}_x(X_n = y) > 0$; logo

$$\mathbb{P}_x(\cup_{\ell\geq 1}\{X_\ell = y\}) \geq \mathbb{P}_x(X_n = y) > 0. \qquad \square$$

Estrutura de classes (cont.)

Proposição. $\leftrightarrow$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{S}$.

Dem. 1) $x \leftrightarrow x$, como já tínhamos observado. (*Reflexividade*)

2) Se $x \leftrightarrow y$ e $y \leftrightarrow z$, então $\exists\, m, n \geq 0$ tq $P^m_{xy} P^n_{yz} > 0$.

Logo,

$$P^{m+n}_{xz} \overset{\text{Chapman-Kolmogorov}}{=} \sum_{w \in \mathcal{S}} P^m_{xw} P^n_{wz} \geq P^m_{xy} P^n_{yz} > 0,$$

e, portanto, $x \to z$.

Similarmente, $z \to x$, e $x \leftrightarrow z$. (*Transitividade*)

3) É óbvio que $x \leftrightarrow y \Rightarrow y \leftrightarrow x$. (*Simetria*) $\square$

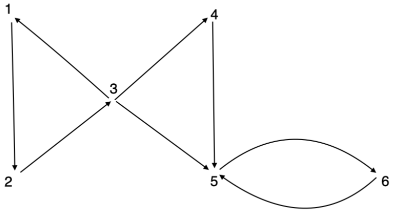
Logo, $\leftrightarrow$ particiona $\mathcal{S}$ em *classes de comunicação* — elementos de uma mesma classe se comunicam (entre si), mas não se comunicam com elementos de outras classes (no entanto, não se descarta que possam *alcançar* elementos de outras classes).

Diremos que uma classe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{S}$ é *fechada* se, dados $x \in \mathcal{C}$ e $y \in \mathcal{S}$, se $x \to y$, então $y \in \mathcal{C}$.

Exemplo

$$\mathcal{S} = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



(Na figura acima, pomos uma seta apontando de x a y se e só se $P_{xy} > 0$, $x \neq y$.)

Classes (de comunicação): $\{1,2,3\}$, $\{4\}$ e $\{5,6\}$.

$\{5,6\}$ é a única classe fechada.

Definições

Dizemos que $x \in \mathcal{S}$ é *absorvente* se $\{x\}$ for uma classe fechada ($\Leftrightarrow P_{xx} = 1$); exemplos: 0 no processo de ramificação; 0 e N na ruína do apostador.

Uma CM para a qual $\mathcal{S}$ é uma classe é dita *irredutível* ($\Leftrightarrow x \leftrightarrow y \ \forall x, y \in \mathcal{S}$).